نظرية التقدير Estimation Theory (فص 12)

1 التقدير النقطي والتقدير بمجال.

قد نحتاج إلى تقدير لمعلمة مجتمع بقيمة واحدة ونقول عن هذا التقدير أنه تقدير نقطي، و أحيانا أخرى نحتاج إلى تقدير معلمة المجتمع بنقطتين يحددان مجال لقيمة المعلمة ونقول عن هذا النوع من التقدير أنه تقدير بمجال.

مثال : إذا قدرنا دخل الأسرة في منطقة ما ب 18000 دع، نكون قد قدرنا دخل الأسرة تقديرا نقطيا. يكون تقديرنا بمجال إذا قلنا مثلا أن الدخل يساوي 18000 ± 2000 أي أنه يتراوح بين 16000 و20000دع.

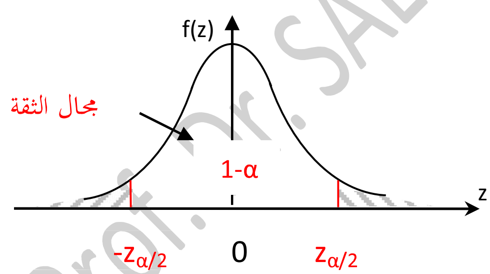
أ- درجة التأكد

لكي يكون التقدير علميا ينبغي تقييم احتمال أن تكون المعلمة تنتمي فعلا إلى المجال المحدد، لذلك نلحق بالمجال ما يسمى بدرجة أو مستوى الثقة، ويرمز له ب p. الاحتمال المعاكس يسمى احتمال الخطأ ويرمز له ب α ، ويسمى أيضا ""مستوى المعنوية".

مثال: دخل الأسرة في المنطقة (أ) ينتمي إلى المجال [16000، 20000] بمستوى معنوية 5 % أي بمستوى ثقة 95 % . وتسمى الحدود 16000 و20000 حدود الثقة.

ب- تعيين حدود مجال الثقة

تحدد حدود الثقة من خلال معاملات الثقة التي بدورها تحدد من خلال مستوى المعنوية (مستوى الثقة α). ففي حالة استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير تكون القيمتين ± 1.96 معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 95% بينما القيمتين ±2.58 تمثلان معاملات الثقة من أجل مستوى ثقة 99 % .



رسم 8 مجال الثقة للتوزيع الطبيعي

مثال: ليكن μ_s و σ_s متوسط وانحراف معياري توزيع المعاينة لإحصائية ما s حيث $\mu_s = \mu$. إذا كان توزيع المعاينة ل s توزيعا طبيعيا (كما هو الحال بالنسبة لأغلب الإحصائيات لحجم العينة $(n \geq 30)$) فإننا نقدر مثلا وبالنظر إلى توزيع s أن:

القيمتين $\mu_s \pm 1.96\ \sigma_s$ تمثلان حدود الثقة ب 95 %، و $\mu_s \pm 2.58\ \sigma_s$ حدود الثقة ب 99 %. في حالة التوزيع الطبيعي يرمز لحدود الثقة ب Z_c أو $Z_{1-\alpha/2}$ (أنظر الرسم).

2 مجال الثقة للوسط الحسابي

يقدر الوسط الحسابي للمجتمع μ من خلال الإحصائية m.

أ- تقدير μ باستخدام التوزيع الطبيعي

نستخدم التوزيع الطبيعي لتحديد مجال الثقة إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي.

وفي حالة العينة الممتدة $(n \geq 30)$ يمكن كذلك الاستفادة من نظرية النهاية المركزية أن وسطها الحسابي m تتبع التوزيع الطبيعي.

تكتب حدود مجال الثقة كما يلي:

$$m \pm z_c \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \quad \text{أو} \quad m \pm z_c \frac{S'}{\sqrt{n}}$$

فاذا عوضنا عن Z بما يساويها وبافتراض ان الانحراف المعياري للمجتمع الذي تمثله معلوم $(S' = \sigma)$ وهي $Z_c = \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ لينتج

$$-Z_{\alpha/2} < \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\alpha/2}$$

بذلك فاحتمال ان Z_{est} المحسوبة تقع بين القيمتين $-Z_{\alpha/2}, Z_{\alpha/2}$ هي

$$P(-Z_{\alpha/2} < Z_{est.} < Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

او بشكل اخر تكون الاحتمالية

$$P(m - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} < \mu < m + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}) = 1-\alpha$$

(برهن ذلك)

مثال: سحبت عينة عشوائيا حجمها 36 طالبا من جامعة ما ، فكان معدل اوزانهم 160 باوند وانحراف قياسي قدره 30 باوند، جد فترة ثقة 95% للوسط الحسابي لاوزان طلبة الجامعة.

الحل:

$P(Z\leq Z_{\alpha/2}) - P(Z\leq -Z_{\alpha/2}) = 1 - 0.05 = 0.95$

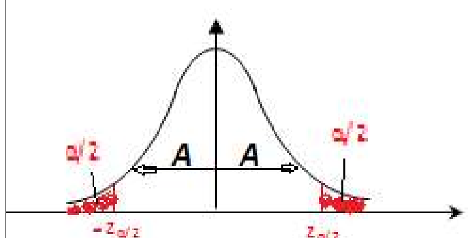
From Fig. A=0.95/2= 0.475 ➔ $P(Z\leq Z_{\alpha/2}) = 0.5+0.475$

➔From Table $Z_{\alpha/2}= 1.96$; Since n>30 hence S=σ

$$m - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} < \mu < m + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

$$160 - 1.96 * 30/\sqrt{36} < \mu < 160 + 1.96 * 30/\sqrt{36}$$

150.2 < μ < 169.8 ➔or P(150.2<μ<169.8)=0.95



مثال 2:

جد حجم العينة التي تمثل فترة الثقة 95% ليكون الفرق $(m \mp \mu)$ اقل من 0.06 علما بان الانحراف المعياري للمجتمع (σ=0.3).

الحل:

It was known that $Z_{\alpha/2}= 1.96$ for 1-α=0.95 , & Z= (m-μ)/S gives $Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n} = m - \mu = e$

$e = Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/\sqrt{n}$ ➔$n=(Z_{\alpha/2} \cdot \sigma/e)^2$; $n=(1.96 * 0.3/0.06)^2 = 96.04 \approx 96$

الجدول الآتي يبين قيم z_c التي تمثل حدود مجال الثقة بحسب مستوى الثقة :

مستوى الثقة $1-\alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.8	0.5
مستوى المعنوية α	0.01	0.02	0.05	0.10	0.2	0.5
$1-\alpha/2$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75
$Z_{1-\alpha/2}$	82.5	2.326	1.96	1.645	1.282	0.674

مثال : نقدر أن μ يوجد داخل المجال $m \pm 1.96\sigma_m$ بمستوى ثقة 95% (0.95) أي بمستوى معنوية 5 % (0.05)، وداخل المجال $m \pm 2.58\sigma_m$ بمستوى ثقة 99% أي بمستوى معنوية 0.01...

ب- تقدير μ باستخدام التوزيع t :

في حالة **العينة الصغيرة (n < 30)** و **σ مجهول** نستخدم **توزيع ستيودنت t** لتحديد مجالات الثقة ل μ. مثلا القيم $-t_{0.975}$ ؛ $t_{0.975}$ تحد 95 % من المساحة تحت المنحنى ونقول أن $-t_{0.975}$; $t_{0.975}$ تمثل القيم الحرجة أو معاملات الثقة عند مستوى ثقة 95 % ونكتب:

$$-t_{0.975} < \frac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} < t_{0.975}$$

ومنه نستخلص مجال الثقة ل μ كما يلي:

$$m - t_{0.975}\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < m + t_{0.975}\cdot\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

3 مجال الثقة للنسبة

أ- حالة المجتمع غير محدود أو المعاينة غير نفادية و العينة الممتدة (n ≥ 30) :

لتكن s إحصائية تمثل نسبة "نجاحات" في عينة ذات حجم $n \geq 30$ مستخرجة من مجتمع ثنائي حيث p هي نسبة النجاحات. تستعمل التوزيع الطبيعي لتقدير p فنعين حدود الثقة ل p كما يلي: $p' \pm z_c\sigma_p$ أين p' نسبة النجاحات في العينة،

نعلم من الفصل السابق أن $\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ ومنه يحدد مجال الثقة ل p كما يلي:

$$p' \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

4. تقدير فترة الثقة للفرق بين وسطين حسابيين لمجتمعين

أ- في حالة ان تبايني المجتمعين معلومين ($\sigma_1^2,\ \sigma_2^2$).

تقدر فترة الثقة لهذه الحالة بالعلاقة الاتية:

$$P\left[(m_1-m_2) - Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}} < (\mu_1-\mu_2) < (m_1-m_2) + Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right] = 1-\alpha$$

مثال: اشترك طلبة الجامعة بامتحان قياسي لأدائهم، اخذت عينتان من طلبة كليتين ولخصت نتائجهما بالجدول ادناه، جد فترة الثقة 96% للفرق بين $\mu_1 - \mu_2$ ؟

الكلية – نتائج العينة	B	A
وسط الدرجات **μ**	76	82
الانحراف المعياري(درجة) **σ**	6	9
حجم العينة المسحوبة **n**	50	75

الحل:

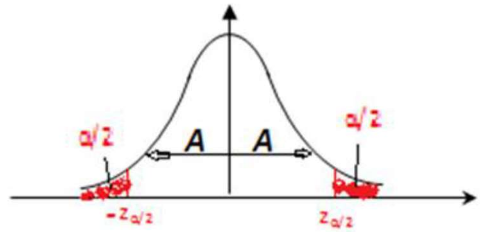
From Fig. A=0.96/2= 0.48 ➔ P($Z \leq Z_{\alpha/2}$) =0.5+0.48=0.98

From Table P(Z<2.05)=0.9798 and P(Z<2.06)=0.9803

Interpolating Z= 2.054 to find P(Z<2.054)=0.9800

$$P\left[(82-76) - 2.054.\sqrt{\frac{81}{75}+\frac{36}{50}} < (\mu_1-\mu_2) < (82-76) + 2.054.\sqrt{\frac{81}{75}+\frac{36}{50}}\right] = 0.96$$

$$P[3.42 < (\mu_1-\mu_2) < 8.58] = 0.96$$



ب- في حالة ان تبايني المجتمعين غير معلومين، مما يستوجب حسابهما للعينتين لتكونان (S_1^2, S_2^2).

تقدر فترة الثقة لهذه الحالة بالعلاقة الاتية:

$$P\left[(m_1-m_2)-Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(m_1-m_2)+Z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right]=1-\alpha$$

5. مجال الثقة للتباين

لتقدير التباين والانحراف المعياري لمجتمع بمجال ثقة نستعمل الخاصية : $\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2_{n-1}$.

مثال: مجال الثقة ب95 % يحدد كما يلي:

$$\chi^2_{0.025}\leq\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\leq\chi^2_{0.975}$$

ومنه نستنتج مجال الثقة ل σ كما يلي:

$$\frac{\sqrt{n}S}{\chi_{0.975}}\leq\sigma\leq\frac{\sqrt{n}S}{\chi_{0.025}}\qquad Or\qquad\frac{\sqrt{n-1}\hat{S}}{\chi_{0.975}}\leq\sigma\leq\frac{\sqrt{n-1}\hat{S}}{\chi_{0.025}}$$

نظرا لأن توزيع **مربع كاي** غير متماثل فإن المجال أعلاه ليس الأمثل، إذ توجد طريقة لتضييق مجال الثقة أكثر إذا لم نشأ أن تكون أطراف المنحنى متساوية، وهذا بخلاف التوزيعات المتماثلة كالطبيعي وستيودنت **t.**

4 مجالات الثقة لنسبة تباينين

رأينا سابقا أنه إذا كان لدينا مجتمعان <u>طبيعيان</u> تبايناهما σ^2_1 , σ^2_2 وسحبنا منهما عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1 , n_2 فإن :

$$F=\frac{\left[\frac{S_1^2n_1}{n_1-1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2n_2}{n_2-1}\right]\frac{1}{\sigma_2^2}}=\frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2}\rightarrow F_{n_1-1;\,n_2-1}$$

إذا يمكن تكوين تقدير بمجال ل F عند مستوى ثقة 0.98 كما يلي:

$$F_{0.01} \le \frac{\hat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \le F_{0.99}$$

و من ثم يمكن تقدير النسبة بين تبايني المجتمعين كما يلي:

$$\frac{1}{F_{0.99}} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{1}{F_{0.01}} \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$$